FRAÇÕES CONTINUADAS. O CASO FINITO.

FERNANDO FERREIRA

Definição 1. *Dado $a_0 \in \mathbb{R}$ e $a_1, a_2, a_3, \ldots$ uma sucessão de números reais positivos, define-se por recorrência o seguinte:* $[a_0] = a_0$ *e*

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}] = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}].$$

Para se definir $[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n]$ apenas necessitamos de ter os valores $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ e não a sequência toda. Porém, é conveniente pôr as coisas do modo como o fizemos. Tem-se

$$[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1}$$

$$[a_0, a_1, a_2] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}$$

$$[a_0, a_1, a_2, a_3] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}}$$

etc. Em geral, tem-se:

$$[a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots \quad a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

Ao longo desta secção e da próxima, vamos mencionar onze factos simples. Estes factos vão ser úteis adiante. Facto (1): $[a_1, a_2 \ldots, a_n] > 0$. Facto (2):

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2 \ldots, a_n]}.$$

Este facto é um caso particular do Facto (3):

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, \ldots, a_n] = [a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, [a_k, \ldots, a_n]],$$

onde k é um número natural tal que $k \leqslant n$ (o Facto (2) é o caso $k = 1$). O Facto (3) justifica-se facilmente por indução em n. O caso base $n = 1$ é a igualdade $[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{[a_1]}$. O passo de indução é fácil: para $k \leqslant n$ tem-se

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, \ldots, a_n, a_{n+1}] = [a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, \ldots, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}] =$$

$$= [a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, [a_k, \ldots, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}]] = [a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, [a_k, \ldots, a_n, a_{n+1}]],$$

onde a igualdade do meio se justifica por hipótese de indução. O caso $k = n + 1$ é direto, pois resulta de se ter $[a_{n+1}] = a_{n+1}$.

O Facto (4), que iremos usar na próxima secção, é o seguinte. Fixe-se $n \in \mathbb{N}$. A aplicação de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^+)^n$ para $\mathbb{R}$ definida por

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n) \rightsquigarrow [a_0, a_1, \ldots, a_n]$$

é contínua. Isto é claro.

O nosso objetivo é estudar frações continuadas em que as entradas $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ são números inteiros: as chamadas frações continuadas *simples* (finitas, como nesta secção; infinitas, como na próxima). É, porém, conveniente dar a definição acima – mais geral – cujas entradas são números reais.

É claro que toda a fração continuada simples (finita) é um número racional. Chamemos a esta observação o Facto (5). E quanto ao recíproco deste facto? Comecemos com um exemplo:

$$\frac{79}{28} = 2 + \frac{23}{28} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{28}{23}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{5}{23}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{23}{5}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{3}{5}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{3}}}} =$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{3}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}} = [2, 1, 4, 1, 1, 2].$$

A situação é geral:

Proposição. *Todo o número racional pode ser escrito como uma fração continuada simples (finita).*

Observação. *A representação dum número racional como fração continuada simples não é única. Por exemplo,* $\frac{79}{28} = [2, 1, 4, 1, 1, 2] = [2, 1, 4, 1, 1, 1, 1]$. *Pode mostrar-se que cada número racional tem exatamente duas representações como fração continuada simples.*

Demonstração. Seja $\frac{a}{b}$ um número racional ($a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$). Consideramos quatro casos.

O primeiro caso é quando $1 \leqslant b < a$. Neste caso procedemos por indução completa em a. Pelo algoritmo da divisão, seja $a = bq + r$ ($q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant r < b$). Se $r = 0$, tem-se simplesmente $\frac{a}{b} = [q]$. Caso $0 < r < b$, vem

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} = q + \cfrac{1}{\cfrac{b}{r}} = q + \frac{1}{[\cdots]} = [q, \cdots],$$

onde $\frac{b}{r}$ é uma certa fração continuada simples $[\cdots]$, por hipótese de indução.

O segundo caso é quando $1 \leqslant a \leqslant b$. Se $b = a$, tem-se $\frac{a}{b} = [1]$. Se $a < b$ tem-se

$$\frac{a}{b} = 0 + \cfrac{1}{\cfrac{b}{a}} = 0 + \frac{1}{[\cdots]} = [0, \cdots],$$

onde $\frac{b}{a}$ é uma certa fração continuada $[\cdots]$, pelo caso acima.

O terceiro caso é quando $a = 0$. Neste caso, $\frac{a}{b} = [0]$.

Finalmente, o quarto caso é quando $a < 0$. Como sabemos, existem $b, r \in \mathbb{Z}$, com $0 \leqslant r < b$, tais que $a = bq + r$. Se $r = 0$, tem-se $\frac{a}{b} = [q]$. Se $r \neq 0$, vem

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} = q + \frac{1}{\frac{b}{r}} = q + \frac{1}{[\cdots]} = [q, \cdots],$$

onde $\frac{b}{r}$ é uma certa fração continuada $[\cdots]$, pelo primeiro caso.

$\square$